

เฉลยละเอียด

ข้อสอบวิชา คณิตศาสตร์

A-Level health check-up

เฉลยข้อสอบวิชา คณิตศาสตร์

1. กำหนดให้ A, B เป็นเซตซึ่ง $n(A) = a, n(B) = b$ ถ้า $n[(A - B) \cup (B - A)] = 7$ และ $n(A \times B) = 40$ แล้ว $n(\{C \mid C \subset A \cup B \text{ และ } n(C) \leq 2\})$ เท่ากับเท่าใด
1. 40
 2. 48
 3. 56
 4. 62
 5. 70

คำตอบที่ถูกต้อง ข้อ 3. 56

เฉลยละเอียด

$$\text{สมมติให้ } n(A \cap B) = x$$

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = a - x$$

$$n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = b - x$$

$$\text{จาก } n[(A - B) \cup (B - A)] = 7 \text{ จะได้ } n(A - B) + n(B - A) = 7$$

$$a - x + b - x = 7$$

$$x = \frac{a + b - 7}{2}$$

$$\text{จาก } n(A \times B) = 40 \text{ จะได้}$$

$$n(A) \cdot n(B) = 40 \Rightarrow ab = 40$$

$$\text{ไล่หา } a, b \text{ จะได้ } (1)(40), (2)(20), (4)(10), (5)(8)$$

$$\text{จาก } x = \frac{a + b - 7}{2} \text{ เอา } a, b \text{ แต่ละกรณีมาแทน จะได้}$$

$$x = \frac{1 + 40 - 7}{2} = 17$$

$$x = \frac{2 + 20 - 7}{2} = \frac{15}{2}$$

$$x = \frac{4 + 10 - 7}{2} = \frac{7}{2}$$

$$x = \frac{5 + 8 - 7}{2} = 3 \text{ สอดคล้องกับโจทย์}$$

A-Level health check-up

เฉลยละเอียด (ต่อ)

$$\text{จะได้ } n(A \cup B) = n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A) = 2 + 3 + 5 = 10$$

ดังนั้น จำนวนสับเซตของ $A \cup B$ ที่มีสมาชิกน้อยกว่าเท่ากับ 2 มีค่าเท่ากับ $\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} = 56$ Ans



A-Level health check-up

2. กำหนดตารางค่าความจริงของ $p * q$ ดังนี้

p	q	$p * q$
T	T	F
T	F	T
F	T	F
F	F	T

ประพจน์ใดต่อไปนี้เป็นสัจนิรันดร์

1. $(p \wedge q \wedge r) * (p \wedge \sim p)$
2. $(p \vee q \vee r) * (p \vee \sim p)$
3. $((p \rightarrow q) \rightarrow r) * (p \rightarrow \sim p)$
4. $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) * (p \rightarrow p)$
5. $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) * (\sim p)$

คำตอบที่ถูกต้อง ข้อ 1. $(p \wedge q \wedge r) * (p \wedge \sim p)$

เฉลยละเอียด

พิจารณา ตัวเลือก 1

$$(p \wedge q \wedge r) * (p \wedge \sim p) \equiv (p \wedge q \wedge r) * F$$

จากตาราง บรรทัดที่ 2, 4 จะได้ว่า

$$(p \wedge q \wedge r) * (p \wedge \sim p) \equiv (p \wedge q \wedge r) * F \equiv T \text{ เสมอ}$$

ดังนั้น $(p \wedge q \wedge r) * (p \wedge \sim p)$ เป็นสัจนิรันดร์ Ans

A-Level health check-up

3. กำหนดให้ $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b และ c เป็นค่าคงตัว
ถ้า $P(x) - 3$ หารด้วย $x - 1, x + 2$ และ $x + 3$ ลงตัว แล้ว $a + b + 3c$ มีค่าเท่ากับเท่าใด
1. 4
 2. 8
 3. 12
 4. -4
 5. -8

คำตอบที่ถูกต้อง ข้อ 4. -4

เฉลยละเอียด

จาก $P(x) - 3$ หารด้วย $x - 1, x + 2, x + 3$ ลงตัว จะได้ว่า $P(x) - 3 = (x - 1)(x + 2)(x + 3)$

$$P(x) = (x - 1)(x + 2)(x + 3) + 3$$

แทน $x = 0$ จะได้

$$P(0) = (-1)(2)(3) + 3 = c$$

$$\therefore c = -3$$

แทน $x = 1$ จะได้

$$P(1) = (0)(3)(4) + 3 = 1 + a + b + c$$

$$\therefore a + b + c = 2$$

ดังนั้น $a + b + 3c$ เท่ากับ -4 Ans

A-Level health check-up

4. ให้ S เป็นเซตคำตอบของสมการ

$$\frac{3x-2}{|x-1|-1} \geq 0$$

เซต $\{x \mid x > 0 \text{ และ } x \notin S\}$ เป็นสับเซตของช่วงใดต่อไปนี้

1. $[0, 1]$
2. $\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right]$
3. $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$
4. $\left[\frac{3}{4}, 3\right]$
5. $\left[\frac{4}{5}, 4\right]$

คำตอบที่ถูกต้อง ข้อ 3. $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$

เฉลยละเอียด

แบ่งกรณี

กรณี $x < 1$

$$\frac{3x-2}{-(x-1)-1} \geq 0$$

$$\frac{3x-2}{-x} \geq 0$$

$$\frac{3x-2}{x} \leq 0$$

$$x \in \left(0, \frac{2}{3}\right]$$

นำคำตอบไป อินเตอร์เซกกับ $x < 1$

$$\therefore x \in \left(0, \frac{2}{3}\right]$$

กรณี $x \geq 1$

$$\frac{3x-2}{(x-1)-1} \geq 0$$

$$\frac{3x-2}{x-2} \geq 0$$

A-Level health check-up

เฉลยละเอียด (ต่อ)

$$x \in \left(-\infty, \frac{2}{3}\right] \cup (2, \infty)$$

นำคำตอบไปอินเตอร์เซกกับ $x \geq 1$

$$\therefore x \in (2, \infty)$$

$$\text{ดังนั้น } S = \left(0, \frac{2}{3}\right] \cup (2, \infty)$$

$$\text{โจทย์ต้องการ } \{x \mid x > 0 \text{ และ } x \notin S\} = \left(\frac{2}{3}, 2\right] \subset \left[\frac{1}{2}, 2\right] \text{ Ans}$$

A-Level health check-up

5. ให้ H เป็นไฮเพอร์โบลา $12y^2 - 4x^2 + 72y + 16x + 44 = 0$ ซึ่งมีจุดโฟกัสคือ

F_1 และ F_2 ให้ E เป็นวงรีซึ่งมีจุดศูนย์กลางร่วมกับ H โดยมี F_1 และ F_2 เป็นจุดยอด และสัมผัสกับแกน Y ถ้า E ตัดแกน X ที่จุด A และ B แล้ว AB ยาวเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\sqrt{8}$ หน่วย
2. $\sqrt{7}$ หน่วย
3. $\sqrt{6}$ หน่วย
4. $\sqrt{5}$ หน่วย
5. $\sqrt{4}$ หน่วย

คำตอบที่ถูกต้อง ข้อ 2. $\sqrt{7}$ หน่วย

เฉลยละเอียด

$$12y^2 - 4x^2 + 72y + 16x + 44 = 0$$

$$12(y^2 + 6y + 9 - 9) - 4(x^2 - 4x + 4 - 4) + 44 = 0$$

$$12((y + 3)^2 - 9) - 4((x - 2)^2 - 4) + 44 = 0$$

$$12(y + 3)^2 - 108 - 4(x - 2)^2 + 16 + 44 = 0$$

$$12(y + 3)^2 - 4(x - 2)^2 = 48$$

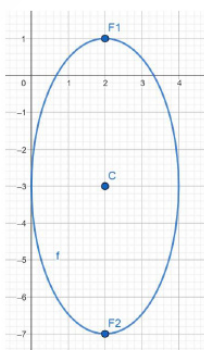
$$\frac{(y + 3)^2}{4} - \frac{(x - 2)^2}{12} = 1$$

จะได้ $(h, k) = (2, -3)$, $a^2 = 4$, $b^2 = 12$

$$\text{จาก } c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 4 + 12 \Rightarrow c^2 = 16 \Rightarrow c = 4$$

จะได้จุดโฟกัส $(2, -7)$, $(2, 1)$

วาดรูปวงรีตามโจทย์



$$\frac{(x - 2)^2}{4} + \frac{(y + 3)^2}{16} = 1$$

A-Level health check-up

เฉลยละเอียด

หาจุดตัดแกน x วงรี ($y = 0$)

$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(3)^2}{16} = 1$$

$$\frac{(x-2)^2}{4} = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$$

$$(x-2)^2 = \frac{7}{4}$$

$$x = 2 \pm \frac{\sqrt{7}}{2}$$

ดังนั้น $A\left(2 - \frac{\sqrt{7}}{2}, 0\right), B\left(2 + \frac{\sqrt{7}}{2}, 0\right)$

ดังนั้น AB ยาวเท่ากับ $\sqrt{7}$ Ans

A-Level health check-up

6. กำหนดให้ $f(x) = ax^2 + b$ และ $g(x - 1) = 6x + c$ เมื่อ a, b, c เป็นค่าคงตัว
ถ้า $f(x) = g(x)$ เมื่อ $x = 1, 2$ และ $(f + g)(1) = 8$ แล้ว $(f \circ g^{-1})(16)$ มีค่าเท่ากับข้อใด
ต่อไปนี้

1. $\frac{31}{9}$
2. $\frac{61}{9}$
3. 10
4. 20
5. 40

คำตอบที่ถูกต้อง ข้อ 4. 20

เฉลยละเอียด

$$g(x - 1) = 6x + c \Rightarrow g(x + 1 - 1) = 6(x + 1) + c \Rightarrow g(x) = 6x + 6 + c$$

จาก $f(x) = g(x)$ เมื่อ $x = 1, 2$

$$f(1) = g(1) \Rightarrow a + b = 12 + c$$

$$f(2) = g(2) \Rightarrow 4a + b = 18 + c$$

จาก $(f + g)(1) = f(1) + g(1) = 8 \Rightarrow a + b + 12 + c = 8$

แทน $a + b$ ด้วย $12 + c$

$$12 + c + 12 + c = 8 \Rightarrow 2c = -16 \Rightarrow c = -8$$

$$a + b = 12 + c \Rightarrow a + b = 4$$

$$4a + b = 18 + c \Rightarrow 4a + b = 10$$

แก้สมการ $a = 2, b = 2$

ดังนั้น $f(x) = 2x^2 + 2, g(x) = 6x - 2$

หา g^{-1}

$$y = 6x - 2 \text{ สลับ } x, y \text{ จะได้ } x = 6y - 2 \Rightarrow y = \frac{x+2}{6}$$

$$\therefore (f \circ g^{-1})(16) = f(g^{-1}(16)) = f\left(\frac{16+2}{6}\right) = f(3) = 2(3^2) + 2 = 20 \text{ Ans}$$

A-Level health check-up

7. กำหนดให้ S เป็นเซตคำตอบของสมการ

$$4 \cdot 2^{\log x^2} - 9 \cdot 2^{\left(\log \frac{x}{10} + 1\right)} + 2 \leq 0$$

ถ้า a และ b เป็นสมาชิกของ S ที่มีค่ามากที่สุดและค่าน้อยสุด ตามลำดับแล้ว $\frac{a}{b}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 20
2. 100
3. 200
4. 1000
5. 2000

คำตอบที่ถูกต้อง ข้อ 4. 1000

เฉลยละเอียด

$$\text{จาก } 4 \cdot 2^{\log x^2} - 9 \cdot 2^{\left(\log \frac{x}{10} + 1\right)} + 2 \leq 0$$

$$4 \cdot 2^{2\log x} - 9 \cdot 2^{\left(\log \frac{x}{10} + \log 10\right)} + 2 \leq 0$$

$$4 \cdot 2^{2\log x} - 9 \cdot 2^{\left(\log \left(\frac{x}{10}\right)(10)\right)} + 2 \leq 0$$

$$4 \cdot 2^{2\log x} - 9 \cdot 2^{(\log x)} + 2 \leq 0$$

$$\text{ให้ } A = 2^{(\log x)}$$

$$4 \cdot A^2 - 9A + 2 \leq 0$$

$$(4A - 1)(A - 2) \leq 0$$

$$\frac{1}{4} \leq A \leq 2$$

$$2^{-2} \leq 2^{(\log x)} \leq 2$$

$$-2 \leq \log x \leq 1$$

$$10^{-2} \leq x \leq 10$$

ตรวจคำตอบหลัง $\log$ มากกว่า 0 จะได้ $x^2 > 0, \frac{x}{10} > 0 \Rightarrow x > 0$

ดังนั้น เซตคำตอบ คือ $\frac{1}{100} \leq x \leq 10$

$$\therefore a = 10, b = \frac{1}{100} \Rightarrow \frac{a}{b} = 1000$$

A-Level health check-up

8. ให้ $A = \arcsin\left(\sin^2 \frac{3\pi}{8} - \cos^2 \frac{3\pi}{8}\right)$ $B = \arccos\left(\cos \frac{7\pi}{12} - \cos \frac{13\pi}{12}\right)$

ค่าของ $A + B$ เท่ากับข้อใด

1. 0
2. $\frac{\pi}{4}$
3. $\frac{\pi}{2}$
4. $\frac{3\pi}{4}$
5. $\frac{3\pi}{2}$

คำตอบที่ถูกต้อง ข้อ 3. $\frac{\pi}{2}$

เฉลยละเอียด

พิจารณา A

$$\begin{aligned} A &= \arcsin\left(\sin^2 \frac{3\pi}{8} - \cos^2 \frac{3\pi}{8}\right) = \arcsin\left(-\left(\cos^2 \frac{3\pi}{8} - \sin^2 \frac{3\pi}{8}\right)\right) = \arcsin\left(-\cos 2\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right) \\ &= \arcsin\left(-\cos \frac{3\pi}{4}\right) = \arcsin\left(-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

พิจารณา B

$$\begin{aligned} B &= \arccos\left(\cos \frac{7\pi}{12} - \cos \frac{13\pi}{12}\right) = \arccos\left(-2 \sin\left(\frac{\frac{7\pi}{12} + \frac{13\pi}{12}}{2}\right) \sin\left(\frac{\frac{7\pi}{12} - \frac{13\pi}{12}}{2}\right)\right) \\ &= \arccos\left(-2 \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \arccos\left(-2\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$$\therefore A + B = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \text{ Ans}$$

A-Level health check-up

9. กำหนดให้ A และ B เป็นเมตริกซ์ขนาด 2×2

ถ้า $A + 2B = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 16 \end{bmatrix}$ และ $A - B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$ แล้ว $\det(2A^{-1}B)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. 2
2. 4
3. 6
4. 8
5. 10

คำตอบที่ถูกต้อง ข้อ 4. 8

เฉลยละเอียด

$$\text{จาก } A + 2B = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 16 \end{bmatrix} \text{ และ } A - B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$(A + 2B) - (A - B) = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 16 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow 3B = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 9 & 21 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\text{จาก } A - B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} + B \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \det(2A^{-1}B) = 2^2 \frac{\det(B)}{\det(A)} = 4 \frac{(7-3)}{(6-4)} = 8 \text{ Ans}$$

A-Level health check-up

10. กำหนดให้ z_1, z_2, z_3 เป็นรากของสมการ $(1-i)z^3 = \sqrt{2}$ โดยที่ z_1, z_2, z_3 อยู่ในควอดรันต์ที่ 1, 2, 3 ตามลำดับ $z_1 z_3 + z_2^2$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. $-2i$
 2. $2i$
 3. -2
 4. 2
 5. 4

คำตอบที่ถูกต้อง ข้อ 1. $-2i$

เฉลยละเอียด

$$\text{จาก } (1-i)z^3 = \sqrt{2}$$

$$z^3 = \frac{\sqrt{2}}{(1-i)} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \sqrt{2} \frac{(1+i)}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

$$\text{จาก } z^3 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \text{ เราจะได้ว่า } z \text{ คือ รากที่ 3 ของ } \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

$$\text{เปลี่ยน } \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \text{ เป็นเชิงขั้วจะได้ } \cos 45^\circ + i \sin 45^\circ$$

$$z^3 = \cos 45^\circ + i \sin 45^\circ$$

หาราก

$$\begin{aligned} (z^3)^{\frac{1}{3}} &= \cos \frac{1}{3}(45^\circ) + i \sin \frac{1}{3}(45^\circ) \\ &= \cos 15^\circ + i \sin 15^\circ \end{aligned}$$

แต่ละรากทำมุมห่างกัน $\frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$ จะได้รากทั้งหมด คือ

$$\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ, \cos 135^\circ + i \sin 135^\circ, \cos 255^\circ + i \sin 255^\circ$$

โจทย์กำหนดให้ z_1, z_2, z_3 อยู่ในควอดรันต์ที่ 1, 2, 3 ตามลำดับ

ดังนั้น $z_1 z_3 + z_2^2$ เท่ากับ

$$(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)(\cos 255^\circ + i \sin 255^\circ) + (\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ)^2$$

$$= \cos(15^\circ + 255^\circ) + i \sin(15^\circ + 255^\circ) + (\cos 270^\circ + i \sin 270^\circ)$$

$$= \cos 270^\circ + i \sin 270^\circ + \cos 270^\circ + i \sin 270^\circ$$

$$= -i - i = -2i \text{ Ans}$$

A-Level health check-up

11. กำหนดให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์สามมิติโดยที่ $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 3$ และ $|3\vec{u} + 2\vec{v}| = 6$

จงหาค่าของ $|\vec{u} \times \vec{v}|^2$

1. 3
2. 9
3. 27
4. 81
5. 729

คำตอบที่ถูกต้อง ข้อ 3. 27

เฉลยละเอียด

$$\text{จาก } |3\vec{u} + 2\vec{v}| = 6$$

$$|3\vec{u} + 2\vec{v}|^2 = 6^2$$

$$9|\vec{u}|^2 + 12\vec{u} \cdot \vec{v} + 4|\vec{v}|^2 = 6^2$$

แทนค่า $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$

$$9(4) + 12\vec{u} \cdot \vec{v} + 4(9) = 36$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -3$$

$$|\vec{u}||\vec{v}| \cos \theta = -3$$

$$(2)(3) \cos \theta = -3$$

$$\cos \theta = -\frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 120^\circ$$

$$\therefore |\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 \sin^2 120^\circ = (2)^2 (3)^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = (4)(9) \left(\frac{3}{4}\right) = 27 \text{ Ans}$$

A-Level health check-up

12. ถ้า a_n เป็นค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูล

$$1, 2, 2, 3, 3, 3, \dots, \overbrace{n, n, n, \dots, n}^{\text{มี } n \text{ พจน์}}$$

แล้ว $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0

2. $\frac{1}{2}$

3. $\frac{1}{3}$

4. $\frac{2}{3}$

5. 1

คำตอบที่ถูกต้อง ข้อ 4. $\frac{2}{3}$

เฉลยละเอียด

$$a_n = \frac{1 + (2 + 2) + (3 + 3 + 3) + \dots + (n + n + n + \dots + n)}{1 + 2 + 3 + \dots + n}$$

$$= \frac{1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{1 + 2 + 3 + \dots + n}$$

$$= \frac{\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)}{\frac{n}{2}(n+1)}$$

$$a_n = \frac{2n+1}{3}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3n} = \frac{2}{3} \text{ Ans}$$

A-Level health check-up

13. ถ้า $\log_9 3, \log_9 (3^x - 2), \log_9 (3^x + 16)$ เป็นสามพจน์แรกที่ยเรียงกันในอนุกรมเลขคณิต และ S เป็นผลบวกของสี่พจน์แรกของอนุกรมนี้ แล้ว S มีค่าเท่ากับเท่าใด
1. 5
 2. 6
 3. 9
 4. 27
 5. 81

คำตอบที่ถูกต้อง ข้อ 1. 5

เฉลยละเอียด

ลำดับเลขคณิต พจน์ขวา - พจน์ซ้าย คงที่

$$\log_9 (3^x - 2) - \log_9 3 = \log_9 (3^x + 16) - \log_9 (3^x - 2)$$

$$\log_9 \left(\frac{3^x - 2}{3} \right) = \log_9 \left(\frac{3^x + 16}{3^x - 2} \right)$$

$$\frac{3^x - 2}{3} = \frac{3^x + 16}{3^x - 2}$$

$$(3^x - 2)^2 = 3 \cdot 3^x + 48$$

$$3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 4 = 3 \cdot 3^x + 48$$

$$3^{2x} - 7 \cdot 3^x - 44 = 0$$

$$(3^x - 11)(3^x + 4) = 0$$

$$3^x = -4, 11$$

$$3^x = 11$$

ลำดับเลขคณิต

$$\text{คือ } \log_9 3, \log_9 (11 - 2), \log_9 (11 + 16), \dots \Rightarrow \log_9 3, \log_9 9, \log_9 27, \dots \Rightarrow \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$$

$$\text{หาผลบวกสี่พจน์แรก เท่ากับ } \frac{4}{2}(2a_1 + 3d) = \frac{4}{2}\left(2\left(\frac{1}{2}\right) + 3\left(\frac{1}{2}\right)\right) = 5 \text{ Ans}$$

A-Level health check-up

14. กำหนดให้ g เป็นฟังก์ชันพหุนาม และ $f(x) = x g(x)$ ถ้า $f'(x) = 4x^3 + 9x^2$ และ $f(0) = 0$ แล้ว $\frac{d}{dx} \left[\frac{f(x)}{g(x+1)} \right]$ ที่จุด $x = -2$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. -4
 2. -2
 3. 2
 4. 4
 5. 8

คำตอบที่ถูกต้อง ข้อ 1. -4

เฉลยละเอียด

จาก $f'(x) = 4x^3 + 9x^2$

$$\int f'(x) dx = \int 4x^3 + 9x^2 dx$$

$$f(x) = x^4 + 3x^3 + c$$

แทน $x = 0$

$$f(0) = c = 0$$

$$\therefore f(x) = x^4 + 3x^3$$

จาก $f(x) = xg(x)$

$$x^4 + 3x^3 = xg(x)$$

$$\therefore g(x) = x^3 + 3x^2$$

หา $\frac{d}{dx} \left[\frac{f(x)}{g(x+1)} \right]$

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{f(x)}{g(x+1)} \right] = \frac{g(x+1) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x+1) \cdot 1}{(g(x+1))^2}$$

แทน $x = -2$

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{f(x)}{g(x+1)} \right] = \frac{g(-1) \cdot f'(-2) - f(-2) \cdot g'(-1)}{(g(-1))^2}$$

A-Level health check-up

เฉลยละเอียด

$$\text{จาก } f(x) = x^4 + 3x^3, \quad g(x) = x^3 + 3x^2 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 + 9x^2, \quad g'(x) = 3x^2 + 6x$$

$$f(-2) = 16 - 24 = -8, \quad g(-1) = -1 + 3 = 2 \Rightarrow f'(-2) = -32 + 36 = 4, \quad g'(-1) = 3 - 6 = -3$$

$$f(-2) = -8, \quad g(-1) = 2 \Rightarrow f'(-2) = 4, \quad g'(-1) = -3$$

$$\therefore \frac{d}{dx} \left[\frac{f(x)}{g(x+1)} \right] \Big|_{x=-2} = \frac{g(-1) \cdot f'(-2) - f(-2) \cdot g'(-1)}{(g(-1))^2} = \frac{(2)(4) - (-8)(-3)}{(2)^2} = -4 \text{ Ans}$$

A-Level health check-up

15. ถ้าความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่จุด (x, y) ใดๆ เป็น $2x - 4$ และ f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์เท่ากับ 10 หน่วย แล้ว พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟของ $y = f(x)$ แกน X จาก $x = 0$ ถึง $x = 3$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. 33
 2. 36
 3. 39
 4. 42
 5. 45

คำตอบที่ถูกต้อง ข้อ 1. 33

เฉลยละเอียด

จาก ความชันเส้นสัมผัสเส้นโค้ง เท่ากับ $2x - 4$ จะได้ $f'(x) = 2x - 4$
หา ค่าวิกฤต

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$$

จาก f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์เท่ากับ 10 จะได้ $f(2) = 10$

จาก $f'(x) = 2x - 4$

$$\begin{aligned}\int f'(x) dx &= \int 2x - 4 dx \\ f(x) &= x^2 - 4x + c\end{aligned}$$

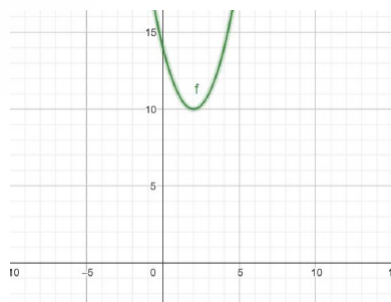
จาก $f(2) = 10$

$$f(2) = 4 - 8 + c = 10 \Rightarrow c = 14$$

$$\therefore f(x) = x^2 - 4x + 14$$

จาก $f(x) = x^2 - 4x + 14$ เราจะรู้ว่าเป็นกราฟพาราโบลาหงาย จัดรูป f

$$f(x) = x^2 - 4x + 14 = x^2 - 4x + 4 + 10 = (x - 2)^2 + 10$$



จากรูปพื้นที่ใต้กราฟ f กับแกน x อยู่เหนือแกน x

$$\text{ดังนั้น พื้นที่ เท่ากับ } \int_0^3 x^2 - 4x + 14 dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 14x \right]_0^3 = 9 - 18 + 42 = 33 \text{ Ans}$$

A-Level health check-up

16. ในการสุ่มหยิบเลข 3 หลัก ที่มากกว่าหรือเท่ากับ 100 มาหนึ่งจำนวน ความน่าจะเป็นที่เลขจำนวนนั้นมีเลข 8 อย่างน้อย 1 หลัก และไม่มีเลข 9 ในหลักใดๆ จะเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{8}$
2. $\frac{1}{9}$
3. $\frac{2}{8}$
4. $\frac{2}{9}$
5. $\frac{3}{8}$

คำตอบที่ถูกต้อง ข้อ 4. $\frac{2}{9}$

เฉลยละเอียด

กรณีมี 8 หลักเดียว และไม่มี 9

8 _ _ ได้ $8 \times 8 = 64$ จำนวน

_ 8 _ ได้ $7 \times 8 = 56$ จำนวน

_ _ 8 ได้ $7 \times 8 = 56$ จำนวน

กรณีมี 8 หลักสองเท่านั้น และไม่มี 9

8 8 _ ได้ 8 จำนวน

8 _ 8 ได้ 8 จำนวน

_ 8 8 ได้ 7 จำนวน

กรณีมี 8 หลักสาม และไม่มี 9

8 8 8 ได้ 1 จำนวน

ดังนั้น $P(E) = \frac{64 + 56 + 56 + 8 + 8 + 7 + 1}{900} = \frac{2}{9}$ **Ans**

A-Level health check-up

17. กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, \dots, 8\}$ และ B เป็นสับเซตของ A โดย B มีจำนวนสมาชิก 4 ตัว จงหาผลบวกของสมาชิกในเซต B ทั้งหมด ที่เป็นไปได้ว่ามีค่าเท่ากับเท่าใด
1. 1120
 2. 1260
 3. 1440
 4. 1520
 5. 1600

คำตอบที่ถูกต้อง ข้อ 2. 1260

เฉลยละเอียด

จำนวนสับเซตที่มีสมาชิก 4 ตัว มีจำนวนเท่ากับ $\binom{8}{4} = 70$ เซต
เราจะสังเกตเห็น $\{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6, 7, 8\}$ ผลบวกจะเท่ากับ $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8$
หรือ $\{2, 3, 4, 5\}, \{1, 6, 7, 8\}$ ผลบวกจะเท่ากับ $2 + 3 + 4 + 5 + 1 + 6 + 7 + 8$
ผลบวกจะเท่ากับ $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8$ ซึ่งจะมีจำนวน 35 ชุด ($70 \div 2$)
ดังนั้น ผลบวกของสมาชิกในเซต B ทั้งหมดเท่ากับ $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8) \times 35$
$$= \frac{8(8+1)}{2} \times 35 = 1260 \text{ Ans}$$

A-Level health check-up

18. ในการหาความแปรปรวนของคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ เนื่องจากต้องการหาค่าอย่างรวดเร็ว จึงใช้ค่ามัธยฐานของคะแนนสอบแทนค่าเฉลี่ยเลขคณิตในการคำนวณ ปรากฏว่าความแปรปรวนที่หาได้มีค่าเท่ากับ 48 คะแนน² ถ้ามัธยฐานมีค่าเท่ากับ 25 คะแนน และค่าเฉลี่ยเลขคณิต มีค่าเท่ากับ 21 คะแนน จงหาความแปรปรวนที่ถูกต้อง
1. 20
 2. 24
 3. 26
 4. 28
 5. 32

คำตอบที่ถูกต้อง ข้อ 5. 32

เฉลยละเอียด

จากโจทย์หาค่าความแปรปรวนโดยใช้ค่ามัธยฐานแทนค่าเฉลี่ยเลขคณิต

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \text{Med})^2}{N}$$

$$48 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - 25)^2}{N}$$

$$48N = \sum_{i=1}^N ((x_i - 21) - 4)^2$$

$$48N = \sum_{i=1}^N ((x_i - 21)^2 - 8(x_i - 21) + 16)$$

$$48N = \sum_{i=1}^N (x_i - 21)^2 - 8 \sum_{i=1}^N (x_i - 21) + \sum_{i=1}^N 16$$

$$48N = \sum_{i=1}^N (x_i - 21)^2 - 8 \left(\sum_{i=1}^N x_i - \sum_{i=1}^N 21 \right) + \sum_{i=1}^N 16$$

$$48N = \sum_{i=1}^N (x_i - 21)^2 - 8 \sum_{i=1}^N x_i + 8 \sum_{i=1}^N 21 + \sum_{i=1}^N 16$$

$$48N = \sum_{i=1}^N (x_i - 21)^2 - 8 \sum_{i=1}^N x_i + 8 \cdot 21N + 16N$$

$$\frac{48}{N} = \sum_{i=1}^N (x_i - 21)^2 - 8 \sum_{i=1}^N x_i + 184N$$

A-Level health check-up

เฉลยละเอียด (ต่อ)

$$\frac{48N}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - 21)^2}{N} - 8 \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} + \frac{184N}{N}$$

$$48 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - 21)^2}{N} - 8\mu + 184$$

$$48 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - 21)^2}{N} - 8(21) + 184$$

$$\therefore \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - 21)^2}{N} = 32 \text{ Ans}$$

A-Level health check-up

19. ข้อมูลชุดหนึ่งมี 6 จำนวน จัดเรียงข้อมูลจากน้อยไปมาก ดังนี้ $a, 5, 7, b, 11, c$ เมื่อ a, b และ c เป็น จำนวนจริงบวก ข้อมูลชุดนี้ มีพิสัยเท่ากับค่าเฉลี่ยเลขคณิต ซึ่งเท่ากับ 8 และ เปอร์เซ็นไทล์ที่ 70 ของข้อมูลเท่ากับ 10.8 ค่าของ $a^2 + b^2 + c^2$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. 234
 2. 237
 3. 241
 4. 269
 5. 283

คำตอบที่ถูกต้อง ข้อ 3. 241

เฉลยละเอียด

$$\text{พิสัย} = \max - \min$$

$$8 = c - a$$

หา ตำแหน่งเปอร์เซ็นไทล์ที่ 70

$$\text{ตำแหน่ง} \quad P_{70} = \frac{70}{100}(6 + 1) = 4.9$$

$$P_{70} = x_4 + 0.9(x_5 - x_4)$$

$$10.8 = b + 0.9(11 - b)$$

$$10.8 = b + 9.9 - 0.9b$$

$$0.9 = 0.1b$$

$$b = 9$$

หาค่าเฉลี่ยเลขคณิต

$$\mu = \frac{a + 5 + 7 + 9 + 11 + c}{6} = 8$$

$$a + c + 32 = 48$$

$$a + c = 16$$

แก้สมการ $8 = c - a$ กับ $a + c = 16$ จะได้ $c = 12, a = 4$

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = 16 + 81 + 144 = 241 \text{ Ans}$$

A-Level health check-up

20. สมมติว่าความน่าจะเป็นที่ยาชนิด A รักษาคนไข้คนหนึ่งๆ แล้วหายเท่ากับ 0.40 เมื่อใช้ยาชนิด A กับคนไข้ 20 คน จงหาความน่าจะเป็นที่จะมีคนไข้หายจากโรคอย่างน้อย 19 คน

1. $\binom{20}{19}(0.4)^{19}(0.6) + \binom{20}{20}(0.4)^{20}(0.6)$

2. $\binom{20}{19}(0.4)^{19} + \binom{20}{20}(0.4)^{20}$

3. $\binom{20}{19}(0.4)^{19}(0.6)^1$

4. $12.4(0.4)^{20}$

5. $12.4(0.4)^{19}$

คำตอบที่ถูกต้อง ข้อ 5. $12.4(0.4)^{19}$

เฉลยละเอียด

จากโจทย์เป็นการแจกแจงทวินาม $n = 20, p = 0.4$

$$P(x_i \geq 19) = P(x_i = 19) + P(x_i = 20)$$

$$= \binom{20}{19}(0.4)^{19}(0.6) + \binom{20}{20}(0.4)^{20}$$

$$= (20)(0.4)^{19}(0.6) + (0.4)^{20}$$

$$= ((20)(0.6) + 0.4)(0.4)^{19}$$

$$= 12.4(0.4)^{19} \text{ Ans}$$