

1. กำหนดให้ A, B, C เป็นเซต ซึ่ง $C \subset (A - B)$, $n(A) = 2 \cdot n(B \cup C)$, $n[(A \cap B) \cup C] = 7$
และ $n(A \cup B) = 20$ จำนวนสมาชิกของเซต $B - A$ มีค่าเท่ากับข้อใด

1. 2

2. 3

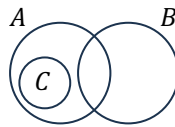
3. 5

4. 6

5. 11

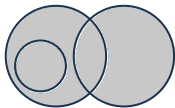
ตอบ ข้อ 1. 2

จาก $C \subset (A - B)$ จะวาดแผนภาพได้เป็น

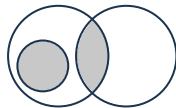


จะวาดแผนภาพของค่าต่างๆ และนำแผนภาพมาบวกกลับกัน เพื่อเกิดเป็นข้อมูลใหม่

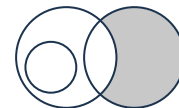
$$n(A \cup B) = 20 \quad \dots(1)$$



$$n[(A \cap B) \cup C] = 7 \quad \dots(2)$$

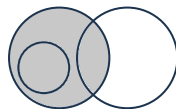


$$\text{สมมติให้ } n(B - A) = x \quad \dots(3)$$



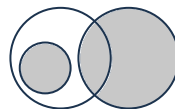
โดยจะพยายามเชื่อมโยงเข้าสู่สมการ $n(A) = 2 \cdot n(B \cup C)$ ที่เหลือ

$$\text{หา } n(A) \text{ ได้จาก } (1) - (3)$$



$$\text{จะได้ } n(A) = 20 - x$$

$$\text{หา } n(B \cup C) \text{ ได้จาก } (2) + (3)$$



$$\text{จะได้ } n(B \cup C) = 7 + x$$

$$\text{แทนในสมการ } n(A) = 2 \cdot n(B \cup C)$$

$$20 - x = 2 \cdot (7 + x)$$

$$20 - x = 14 + 2x$$

$$6 = 3x$$

$$2 = x$$

จึงตอบตัวเลือกข้อ 1.

2. ให้ p, q, r และ s เป็นประพจน์ โดยที่ $(\sim p \wedge q) \rightarrow [\sim r \rightarrow (r \leftrightarrow s)]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ ประพจน์ในข้อใดมีค่าความจริงเป็นจริง

1. $\sim p \rightarrow r$

2. $p \wedge r$

3. $p \leftrightarrow s$

4. $q \wedge s$

5. $q \leftrightarrow r$

ตอบ ข้อ 4. $q \wedge s$

ย่อนหาค่าความจริงของประพจน์ จะได้

$$(\sim p \wedge q) \rightarrow [\sim r \rightarrow (r \leftrightarrow s)]$$

F

T

→

F

T ∧ T

T →

F

~F

~F

F ↔ T

จะได้ $p \equiv F, q \equiv T, r \equiv F, s \equiv T$

1. $\sim F \rightarrow F \equiv F$

2. $F \wedge F \equiv F$

3. $F \leftrightarrow T \equiv F$

4. $T \wedge T \equiv T$

5. $T \leftrightarrow F \equiv F$

จึงตอบตัวเลือกข้อ 4.

3. ลูเน่ไปวิ่งที่สวนสาธารณะเป็นประจำและมักจะวัดอัตราการวิ่งของตนเอง โดยอ้างอิงจากระยะเวลาที่ใช้ในการวิ่ง 1 กิโลเมตร โดยปกติลูเน่จะวิ่งเป็นเวลา 60 นาที ด้วยอัตราคงที่ x นาทีต่อกิโลเมตร อยู่มาวันหนึ่งอากาศร้อนมากกว่าปกติ ลูเน่จึงเปลี่ยนไปวิ่งด้วยอัตราคงที่ $x + 2$ นาทีต่อกิโลเมตร พบว่าในระยะเวลา 60 นาที ลูเน่วิ่งได้ระยะทางลดลง 2.5 กิโลเมตรจากที่เคยวิ่งได้ประจำ ในสถานการณ์ดังกล่าวที่อากาศร้อนมากกว่าปกติ หากลูเน่ต้องการวิ่งให้ได้ระยะทางเท่ากับที่เคยวิ่งได้เป็นประจำ จะต้องใช้เวลาเพิ่มขึ้นกี่นาที
1. 12 2. 15 3. 20 4. 25 5. 30

ตอบ ข้อ 3. 20

ปกติ: จังหวะ x นาทีต่อ ก.ม. คือ จังหวะ x นาทีได้ระยะทาง 1 ก.ม.
 จังหวะ 60 นาทีได้ระยะทาง $\frac{60}{x}$ ก.ม. ... (1)

ร้อน : วิ่ง $x+2$ นาทีต่อ ก.ม. คือ วิ่ง $x+2$ นาทีได้ระยะทาง 1 ก.ม.
 วิ่ง 60 นาทีได้ระยะทาง $\frac{60}{x+2}$ ก.ม. ... (2)

ร็อน จะวิ่งได้ทางลดลง 2.5 ก.ม. แสดงว่า (1) มากกว่า (2) อยู่ 2.5 :

$$\frac{60}{x} - \frac{60}{x+2} = 2.5$$

$$60\left(\frac{x+2-x}{x(x+2)}\right) = 2.5$$

$$\frac{60(2)}{2.5} = x(x+2)$$

$$0 = x^2 + 2x - 48$$

$$0 = (x+8)(x-6)$$
 (จำนวนนาที่ เป็นลบไม่ได้) $x \geq 0, 6$

แทนใน (1) จะได้ระยะทางปกติคือ $\frac{60}{6} = 10$ ก.ม.

ในวันท้อวัน วิ่ง 1 ก.ม. ใช้เวลา $x + 2 = 6 + 2 = 8$ นาที
 วิ่ง 10 ก.ม. ใช้เวลา $\frac{8}{1} \cdot 10 = 80$ นาที

จึงใช้เวลาเพิ่มขึ้น $80 - 60 = 20$ นาที

จึงตอบตัวเลือกข้อ 3.

4. ข้อใดต่อไปนี้เป็นกราฟของสมการ $y^2 - x^2 + 6x - 8 = 0$

1. วงกลมที่มีรัศมีหนึ่งหน่วย

2. วงรีที่มีแกนเอกขนานกับแกน X

3. วงรีที่มีแกนเอกขนานกับแกน Y

4. ไฮเพอร์โบลาที่มีแกนตามขวางขนานกับแกน X

5. ไฮเพอร์โบลาที่มีแกนตามขวางขนานกับแกน Y

ตอบ ข้อ 4. ไฮเพอร์โบลาที่มีแกนตามขวางขนานกับแกน X

พิจารณา

$$y^2 - x^2 + 6x - 8 = 0$$

$$y^2 - (x^2 - 6x) = 8$$

$$y^2 - (x^2 - 6x + 9) = 8 - (+9)$$

$$y^2 - (x - 3)^2 = -1$$

$$(x - 3)^2 - y^2 = 1$$

เทียบได้กับรูป $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ ซึ่งเป็นกราฟไฮเพอร์โบลาแนวนอน (แกนตามขวางขนานแกน X)

จึงตอบตัวเลือกข้อ 4.

5. ให้ f เป็นฟังก์ชันที่กำหนดโดย $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$ ข้อใดถูกต้องเกี่ยวกับโดเมนและเรนจ์ของ f

1. โดเมนคือ $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$ และเรนจ์คือ $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$

2. โดเมนคือ $\mathbb{R}$ และเรนจ์คือ $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$

3. โดเมนคือ $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ และเรนจ์คือ $\{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$

4. โดเมนคือ $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$ และเรนจ์คือ $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 1\}$

5. โดเมนคือ $\mathbb{R}$ และเรนจ์คือ $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 1\}$

ตอบ ข้อ 5. โดเมนคือ $\mathbb{R}$ และเรนจ์คือ $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 1\}$

$$\begin{aligned}\text{หาโดเมน : ในรูทต้อง } \geq 0 &\rightarrow x^2 - 2x + 2 \geq 0 \\ &x^2 - 2x + 1 + 1 \geq 0 \\ &(x - 1)^2 + 1 \geq 0\end{aligned}$$

เนื่องจาก $(x - 1)^2$ ไม่มีทางติดลบ ดังนั้น เงื่อนไขนี้จะจริงเสมอ $\rightarrow$ โดเมนคือ $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\text{หาเรนจ์ : } y &= \sqrt{x^2 - 2x + 2} \\ &= \sqrt{(x - 1)^2 + 1} \\ &\geq \sqrt{0 + 1} = 1 \rightarrow \text{เรนจ์คือ } y \geq 1\end{aligned}$$

จึงตอบตัวเลือกข้อ 5.

6. ให้ $A = \{-1, 0, 1, 2\}$

B เป็นสับเซตของ A โดยที่ $B \neq \emptyset$ และ $2 \notin B$

และ f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B โดยที่ $f(-1) = 1$ และ $f(1) = -1$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก) ถ้า $f(2) > 0$ แล้ว $f(2) = 1$

ข) f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

ค) f มีฟังก์ชันผกผัน

จากข้อความ ก) ข) และ ค) ข้างต้น ข้อใดถูกต้อง

1. ข้อความ ก) ถูกต้องเพียงข้อเดียวเท่านั้น

2. ข้อความ ข) ถูกต้องเพียงข้อเดียวเท่านั้น

3. ข้อความ ค) ถูกต้องเพียงข้อเดียวเท่านั้น

4. ข้อความ ก) และ ข) ถูกต้องเท่านั้น

5. ข้อความ ก) และ ค) ถูกต้องเท่านั้น

ตอบ ข้อ 1. ข้อความ ก) ถูกต้องเพียงข้อเดียวเท่านั้น

ก) เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันไปทั่วถึง B และ $B \subset A$ และ $2 \notin B$ ดังนั้น $f(2)$ ต้องอยู่ใน $\{-1, 0, 1\}$ เท่านั้น ซึ่งถ้า $f(2) > 0$ แล้ว จะเหลือแค่ $f(2) = 1$ ได้ตัวเดียวเท่านั้น $\rightarrow$ ก) ถูก

ข) จาก $f(-1) = 1$ และ $f(1) = -1$ จะเห็นว่า x เพิ่ม แต่ y ลด ผิดเงื่อนไขของฟังก์ชันเพิ่ม $\rightarrow$ ข) ผิด

ค) เนื่องจาก $B \subset A$ และ $2 \notin B$ ดังนั้น B จะมีจำนวนสมาชิกน้อยกว่า A เสมอ

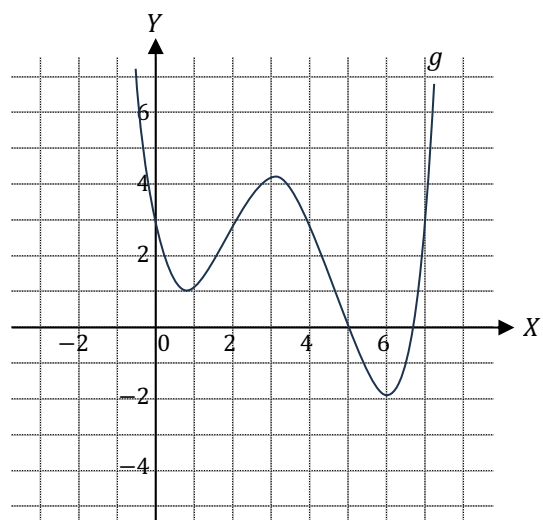
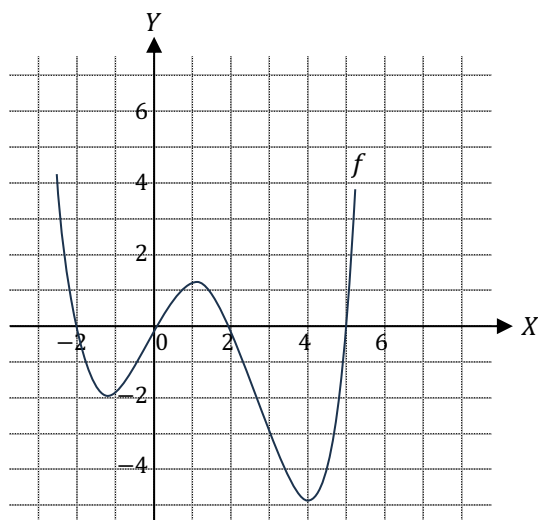
ซึ่งจะทำให้ฟังก์ชัน f จาก A ไป B ต้องมีสมาชิกใน A หลายตัว ถูกโยนไปที่สมาชิกตัวเดียวกันใน B

ดังนั้น อินเวอร์สของ f จะมีสมาชิกตัวหนึ่งใน B ถูกโยนกลับไปสมาชิกหลายตัวใน A ซึ่งจะไม่ใช่ฟังก์ชัน

f จึงไม่มีฟังก์ชันผกผัน $\rightarrow$ ค) ผิด

จึงตอบตัวเลือกข้อ 1.

7. กำหนดกราฟของฟังก์ชัน f และ g ดังรูป



ถ้า a และ b เป็นจำนวนเต็มที่ทำให้ $g(x) = f(x + a) + b$ สำหรับทุก $x \in D_g$

แล้วข้อใดเป็นค่าของ $2a + 3b$

1. -13

2. -5

3. 0

4. 5

5. 13

ตอบ ข้อ 4. 5

จะเห็นว่า f และ g มีกราฟรูปเดียวกัน โดยกราฟ g จะได้จากการเลื่อนกราฟ f ไปทางขวา 2 หน่วย และขึ้น 3 หน่วย (สังเกตจากจุด $(0, 0)$ ของกราฟ f ถูกเลื่อนไปเป็นจุด $(2, 3)$ ของกราฟ g)

นั่นคือ กราฟ g คือ การนำกราฟ f จาก 2 ช่องทางซ้าย มาขยับขึ้นไป 3 หน่วย จะได้

$$g(x) = f(x - 2) + 3$$

เทียบกับ $g(x) = f(x + a) + b$ จะได้ $a = -2$ และ $b = 3$

$$\text{จะได้ } 2a + 3b = 2(-2) + 3(3) = 5$$

จึงตอบตัวเลือกข้อ 4.

8. เซตคำตอบของสมการ $\log_{0.01}(x-1) < \log_{0.0001}(x-1)$ เป็นสับเซตของเซตใดในข้อใด

1. $(-\infty, -2)$ 2. $(1, \infty)$ 3. $(1, 2)$ 4. $(10, \infty)$ 5. $(100, 10000)$

ตอบ ข้อ 2. $(1, \infty)$

$$\log_{0.01}(x-1) < \log_{0.0001}(x-1) \quad \text{เพราะหลัง } \log \text{ ต้องเป็นบวก ดังนั้น } x-1 > 0$$

$$\log_{10^{-2}}(x-1) < \log_{10^{-4}}(x-1)$$

$$\frac{1}{-2} \log_{10}(x-1) < \frac{1}{-4} \log_{10}(x-1)$$

$$2 \log_{10}(x-1) > \log_{10}(x-1)$$

$$\log_{10}(x-1)^2 > \log_{10}(x-1)$$

$$(x-1)^2 > x-1 \quad \text{หารตลอดด้วย } x-1$$

$$x-1 > 1 \quad \text{เพราะ } x-1 > 0 \text{ จึงหารตลอดได้โดยไม่ต้องสลับเครื่องหมาย}$$

$$x > 2 \quad \text{สอดคล้องกับเงื่อนไข } x-1 > 0$$

จะได้คำตอบของสมการคือ $(2, \infty)$ ซึ่งจะเป็นสับเซตของ $(1, \infty)$ ในข้อ 2

จึงตอบตัวเลือกข้อ 2.

9. ถ้า $\log_{\frac{1}{4}} 256 + \frac{2 \log 625}{\log 5} = 3^a$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริง แล้วค่าของ a เท่ากับเท่าใด

1. $\log_3 2$ 2. $\log_3 4$ 3. $\log_3 \frac{33}{4}$ 4. $\log_3 10$ 5. $\log_3 12$

ตอบ ข้อ 2. $\log_3 4$

$$\begin{aligned} \log_{\frac{1}{4}} 256 + \frac{2 \log 625}{\log 5} &= 3^a \\ \log_{(2^{-2})} (2^8) + \frac{2 \log 5^4}{\log 5} &= 3^a \\ \frac{8}{-2} \log_2 2 + \frac{8 \log 5}{\log 5} &= 3^a \\ -4 + 8 &= 3^a \\ 4 &= 3^a \\ \log_3 4 &= a \end{aligned}$$

จึงตอบตัวเลือกข้อ 2.

10. ถ้ามุมของรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีอัตราส่วนของขนาดเป็น $2 : 3 : 7$ แล้วอัตราส่วนของความยาวด้านตรงข้ามมุมทั้งสามนี้มีค่าตรงกับข้อใด

1. $\sqrt{2} : 2 : \sqrt{3} + 1$

2. $\sqrt{2} : 2 : \sqrt{5} + 1$

3. $1 : \sqrt{2} : \sqrt{3} + 1$

4. $1 : \sqrt{2} : \sqrt{5} - 1$

5. $1 : \sqrt{2} : 2$

ตอบ ข้อ 1. $\sqrt{2} : 2 : \sqrt{3} + 1$

ให้มุมทั้งสามคือ $2x$, $3x$ และ $7x$ องศา ตามลำดับ จากสมบัติของสามเหลี่ยม จะได้

$$2x + 3x + 7x = 180^\circ$$

$$12x = 180^\circ$$

$$x = 15^\circ$$

ดังนั้น มุมทั้งสามคือ $2(15^\circ)$, $3(15^\circ)$ และ $7(15^\circ) = 30^\circ$, 45° และ 105°

ให้ด้านทั้งสามคือ a , b และ c จากกฎของ $\sin$ จะได้ $\frac{a}{\sin 30^\circ} = \frac{b}{\sin 45^\circ} = \frac{c}{\sin 105^\circ}$

พิจารณา

$$\sin 105^\circ = \sin(45^\circ + 60^\circ)$$

$$= \sin 45^\circ \cos 60^\circ + \cos 45^\circ \sin 60^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2} \right)$$

ดังนั้น $a : b : c = \sin 30^\circ : \sin 45^\circ : \sin 105^\circ$

$$\frac{1}{2} : \frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\sqrt{2} : 2 : 1 + \sqrt{3}$$

จึงตอบตัวเลือกข้อ 1.

11. ค่าของ $\cot\left(\frac{\pi}{12}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. $\sqrt{3}$

2. $2\sqrt{3}$

3. $4\sqrt{3}$

4. $\frac{9}{2}$

5. $\frac{15}{2}$

ตอบ ข้อ 2. $2\sqrt{3}$

$$\begin{aligned}\cot \theta - \tan \theta &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta} - \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \\&= \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} \\&= \frac{\cos 2\theta}{\sin \theta \cos \theta} \cdot \frac{2}{2} \\&= \frac{2 \cos 2\theta}{\sin 2\theta} = 2 \cot 2\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ดังนั้น } \cot\left(\frac{\pi}{12}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{12}\right) &= 2 \cot\left(2 \cdot \frac{\pi}{12}\right) \\&= 2 \cot\left(\frac{\pi}{6}\right) \\&= 2\sqrt{3}\end{aligned}$$

จึงตอบตัวเลือกข้อ 2.

12. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 2c_1 & 2c_2 & 2c_3 \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 - 3c_1 & a_2 - 3c_2 & a_3 - 3c_3 \end{bmatrix}$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $\det(B) = 2 \det(A)$

ข. $\det(C) = \det(A)$

ค. $\det(B + C) = 0$

ข้อใดกล่าวถูกต้องเสมอ

1. ข้อความ ข. ถูกต้องเพียงข้อเดียวเท่านั้น

3. ข้อความ ก. และ ข. ถูกต้องเพียงสองข้อ

5. ข้อความทั้งสามถูกต้อง

2. ข้อความ ค. ถูกต้องเพียงข้อเดียวเท่านั้น

4. ข้อความ ก. และ ค. ถูกต้องเพียงสองข้อ

ตอบ ข้อ 2. ข้อความ ค. ถูกต้องเพียงข้อเดียวเท่านั้น

ก. B ได้จากการนำ A มาสลับแถว 1 กับแถว 2 และคูณ 2 เข้าไปที่แถว 3

- การสลับแถว จะทำให้ $\det$ เป็นลบของของเดิม
- การคูณ 2 เข้าไปที่แถว 3 จะทำให้ $\det$ เพิ่มขึ้นเป็น 2 เท่า

ดังนั้น $\det(B) = -2 \det(A) \rightarrow$ ก. ผิด

ข. C ได้จากการคูณ -3 เข้าไปที่แถว 3 แล้วนำแถว 1 บวกเข้าไปที่แถว 3

- การคูณ -3 เข้าไปที่แถว 3 จะทำให้ $\det$ เปลี่ยนเป็น -3 เท่า
- นำแถว 1 บวกเข้าไปที่แถว 3 จะไม่ทำให้ $\det$ เปลี่ยน

ดังนั้น $\det(C) = -3 \det(A) \rightarrow$ ข. ผิด

ค. จะได้ $B + C = \begin{bmatrix} b_1 + a_1 & b_2 + a_2 & b_3 + a_3 \\ a_1 + b_1 & a_2 + b_2 & a_3 + b_3 \\ a_1 - c_1 & a_2 - c_2 & a_3 - c_3 \end{bmatrix}$ ซึ่งจะเห็นว่าแถว 1 กับแถว 2 ซ้ำกัน

ดังนั้น $\det(B + C) = 0 \rightarrow$ ค. ถูก

จึงตอบตัวเลือกข้อ 2.

13. กำหนดเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ ดังนี้ $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$
 $\vec{v} = -\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$
 $\vec{w} = 4\vec{i} + 3\vec{j} + a\vec{k}$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริง

ถ้า $\vec{u} \times \vec{v}$ ตั้งฉากกับ $\vec{w}$ แล้วค่าของ a เท่ากับเท่าใด

1. $-\frac{21}{5}$ 2. -4 3. $-\frac{1}{3}$ 4. $\frac{1}{3}$ 5. 1

ตอบ ข้อ 2. -4

ตั้งฉากกัน จะดอทกันได้ 0 ดังนั้น $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = 0$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)(3) - (2)(-2) \\ (2)(-1) - (2)(3) \\ (2)(-2) - (-1)(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -8 \\ -5 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $\begin{bmatrix} 1 \\ -8 \\ -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ a \end{bmatrix} = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$

$$(1)(4) + (-8)(3) + (-5a) = 0$$

$$-5a = 20$$

$$a = -4$$

จึงตอบตัวเลือกข้อ 2.

14. ถ้า z เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้วข้อใดสอดคล้องกับเงื่อนไข $|z| = \sqrt{3}$ และ $|z - i| < 1$

1. $z = \sqrt{3}(\cos \theta + i \sin \theta)$ เมื่อ $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5\pi}{6}$

2. $z = \sqrt{3}(\cos \theta + i \sin \theta)$ เมื่อ $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4}$

3. $z = \sqrt{3}(\cos \theta + i \sin \theta)$ เมื่อ $\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{2\pi}{3}$

4. $z = \sqrt{3}(\cos \theta + i \sin \theta)$ เมื่อ $-\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{6}$

5. $z = \sqrt{3}(\cos \theta + i \sin \theta)$ เมื่อ $-\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{3}$

ตอบ ข้อ 3. $z = \sqrt{3}(\cos \theta + i \sin \theta)$ เมื่อ $\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{2\pi}{3}$

เนื่องจาก $|z| = \sqrt{3}$ ดังนั้น จะเขียน z ในรูปเชิงขั้วได้เป็น $\sqrt{3}(\cos \theta + i \sin \theta)$

แทน $z = \sqrt{3}(\cos \theta + i \sin \theta)$ ใน $|z - i| < 1$ จะได้

$$|\sqrt{3} \cos \theta + i\sqrt{3} \sin \theta - i| < 1$$

$$|\sqrt{3} \cos \theta + i\sqrt{3} \sin \theta - i| < 1$$

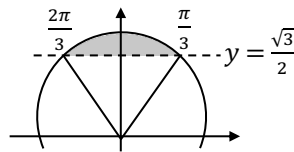
$$\sqrt{(\sqrt{3} \cos \theta)^2 + (\sqrt{3} \sin \theta - 1)^2} < 1$$

$$3 \cos^2 \theta + 3 \sin^2 \theta - 2\sqrt{3} \sin \theta + 1 < 1$$

$$3(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) - 2\sqrt{3} \sin \theta < 0$$

$$3(1) < 2\sqrt{3} \sin \theta$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} < \sin \theta$$



เนื่องจาก $\sin \frac{\pi}{3}$ และ $\sin \frac{2\pi}{3}$ มีค่าเท่ากับ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

และ $\sin$ คือฟังก์ชัน Y

ดังนั้น ถ้าอยากได้ $\sin \theta > \frac{\sqrt{3}}{2}$ ต้องเป็นส่วนที่แรเงา นั่นคือ $\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{2\pi}{3}$

จึงตอบตัวเลือกข้อ 3.

15. ให้ A แทนเซตของจำนวนเชิงซ้อน z ทั้งหมดในระนาบเชิงซ้อน ซึ่งสอดคล้องกับ

สมการ $|z - i|^2 + |z + i|^2 < 4$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก) ถ้า $w \in A$ แล้ว $\operatorname{Re}(w) \in A$

ข) ถ้า $w \in A$ แล้ว $\bar{w} \in A$

ค) ถ้า $w \in A$ แล้ว $w^2 \in A$

จากข้อความ ก) ข) และ ค) ข้างต้น ข้อใดถูกต้อง

1. ข้อความ ก) ถูกต้องเพียงข้อเดียวเท่านั้น
2. ข้อความ ข) ถูกต้องเพียงข้อเดียวเท่านั้น
3. ข้อความ ก) และ ข) ถูกต้องเท่านั้น
4. ข้อความ ข) และ ค) ถูกต้องเท่านั้น

5. ข้อความ ก) ข) และ ค) ถูกต้อง

ตอบ ข้อ 5. ข้อความ ก) ข) และ ค) ถูกต้อง

$$\begin{aligned} \text{แทน } z = x + yi \text{ ในสมการ } |z - i|^2 + |z + i|^2 &< 4 \\ |x + yi - i|^2 + |x + yi + i|^2 &< 4 \\ |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \left(\begin{aligned} |x + (y - 1)i|^2 + |x + (y + 1)i|^2 &< 4 \\ x^2 + (y - 1)^2 + x^2 + (y + 1)^2 &< 4 \\ 2x^2 + y^2 - 2y + 1 + y^2 + 2y + 1 &< 4 \\ 2x^2 + 2y^2 &< 2 \\ x^2 + y^2 &< 1 \end{aligned} \right. \\ |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \left(\begin{aligned} x^2 + y^2 &< 1 \\ |z|^2 &< 1 \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad \text{ดังนั้น } z \in A \text{ เมื่อ } |z|^2 < 1$$

ให้ $w \in A$ จะได้ $|w|^2 < 1 \dots (*)$

ก) โจทย์ถามว่า $\operatorname{Re}(w) \in A$ หรือไม่ $\rightarrow$ ต้องดูว่า $|\operatorname{Re}(w)|^2 < 1$ หรือไม่

$$\begin{aligned} \text{เนื่องจาก } |\operatorname{Re}(w)|^2 &\leq |\operatorname{Re}(w)|^2 + |\operatorname{Im}(w)|^2 \\ &= |w|^2 < 1 \quad \text{จาก } (*) \end{aligned}$$

ดังนั้น $\operatorname{Re}(w) \in A \rightarrow$ ก) ถูก

ข) โจทย์ถามว่า $\bar{w} \in A$ หรือไม่ $\rightarrow$ ต้องดูว่า $|\bar{w}|^2 < 1$ หรือไม่

$$\text{เนื่องจาก } |\bar{w}|^2 = |w|^2 < 1 \quad (\text{จาก } *) \quad \text{จึงทำให้ } \bar{w} \in A \rightarrow \text{ข) ถูก}$$

ค) โจทย์ถามว่า $w^2 \in A$ หรือไม่ $\rightarrow$ ต้องดูว่า $|w^2|^2 < 1$ หรือไม่

$$\begin{aligned} \text{จาก } (*) : \quad |w|^2 &< 1 \\ |w^2| &< 1 \\ |w^2|^2 &< 1 \end{aligned}$$

ดังนั้น $w^2 \in A \rightarrow$ ค) ถูก

จึงตอบตัวเลือกข้อ 5.

16. กำหนดให้ a_n เป็นพจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิต

ถ้า $(a_{28})^2 - (a_{25})^2 = 96$ แล้ว $(a_{29})^2 - (a_{24})^2$ มีค่าเท่ากับข้อใด

1. 120 2. 140 3. 160 4. 200 5. 240

ตอบ ข้อ 3. 160

แทนสูตรพจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิต $a_n = a_1 + (n - 1)d$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } (a_{28})^2 - (a_{25})^2 &= (a_{28} - a_{25})(a_{28} + a_{25}) \\ 96 &= ((a_1 + 27d) - (a_1 + 24d))((a_1 + 27d) + (a_1 + 24d)) \\ 96 &= (3d)(2a_1 + 51d) \\ 32 &= d(2a_1 + 51d) \quad \dots(*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{และ } (a_{29})^2 - (a_{24})^2 &= (a_{29} - a_{24})(a_{29} + a_{24}) \\ &= ((a_1 + 28d) - (a_1 + 23d))((a_1 + 28d) + (a_1 + 23d)) \\ &= (5d)(2a_1 + 51d) \\ &= 5d(2a_1 + 51d) \\ &= 5\left(\frac{32}{1}\right) \quad \text{จาก } (*) \\ &= 160 \end{aligned}$$

จึงตอบตัวเลือกข้อ 3.

17. ปิงฝากเงินครั้งแรก 1,000 บาทตอนต้นปีที่ 1 และฝากเพิ่มในบัญชีเดิมอีก 1,000 บาทตอนต้นปีที่ 2 ถ้าบัญชีนี้ได้รับดอกเบี้ยในอัตราร้อยละ 1 ต่อปี คิดดอกเบี้ยทบต้นทุกปี หากปิงต้องการให้เงินในบัญชีมีมากกว่า 4,020 บาท ปิงต้องคงเงินจำนวนนี้ไว้ในธนาคารอย่างน้อยกี่ปีนับตั้งแต่ที่เริ่มฝากเงินครั้งแรก (กำหนดให้ $\log_{1.01} 2 \approx 69.6$)

1. 68 ปี 2. 69 ปี 3. 70 ปี 4. 71 ปี 5. 72 ปี

ตอบ ข้อ 4. 71 ปี

ดอกเบี้ยร้อยละ 1 จะได้ $1 + r = 1 + \frac{1}{100} = 1.01$

เมื่อผ่านไป n ปี เงินฝากครั้งแรก จะเพิ่มเป็น $1000(1.01)^n$ บาท

เงินฝากครั้งที่ 2 ฝากหลังจากนั้น 1 ปี ดังนั้น จะมีจำนวนปีที่ฝาก น้อยกว่าอยู่ 1 ปี นั่นคือจะมีจำนวนปี $= n - 1$ ปี

ดังนั้น เงินฝากครั้งที่ 2 จะเพิ่มเป็น $1000(1.01)^{n-1}$ บาท

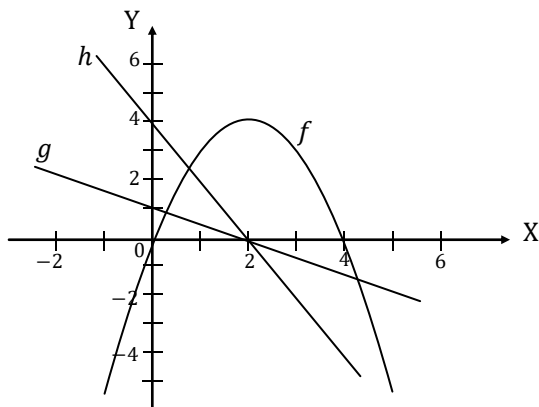
ต้องการให้เงินมากกว่า 4,020 จะได้สมการคือ

$$\begin{aligned} 1000(1.01)^n + 1000(1.01)^{n-1} &> 4020 \\ 1000(1.01)^{n-1} \left(1.01 + 1 \right) &> 4020 \\ 1000(1.01)^{n-1} (2.01) &> 4020 \\ 1000(1.01)^{n-1} &> 2000 \\ (1.01)^{n-1} &> 2 \\ n - 1 &> \log_{1.01} 2 \approx 69.6 \\ n &> 70.6 \end{aligned}$$

จึงต้องคงเงินอย่างน้อย 71 ปี

จึงตอบตัวเลือกข้อ 4.

18. กำหนดกราฟของฟังก์ชัน f เป็นพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด $(2, 4)$ และ ตัดแกน X ที่จุด $(0, 0)$ และ $(4, 0)$ และกราฟของฟังก์ชัน g และ h เป็นเส้นตรง ดังรูป



ข้อใดถูกต้อง

1. $f'(x) = h(x)$ และ $\int_0^2 h(x) dx = -4 \int_2^4 g(x) dx$
2. $f'(x) = h(x)$ และ $\int_0^2 h(x) dx = -3 \int_2^4 g(x) dx$
3. $f'(x) = h(x)$ และ $\int_0^2 h(x) dx = 4 \int_2^4 g(x) dx$
4. $f'(x) = g(x)$ และ $\int_0^2 h(x) dx = -4 \int_2^4 g(x) dx$
5. $f'(x) = g(x)$ และ $\int_0^2 h(x) dx = 4 \int_2^4 g(x) dx$

ตอบ ข้อ 1. $f'(x) = h(x)$ และ $\int_0^2 h(x) dx = -4 \int_2^4 g(x) dx$

ดูตัวเลือกแล้ว คงต้องหา $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ ก่อน

g เป็นเส้นตรงที่มีระยะตัดแกน X และ Y คือ 2 และ 1

$$\begin{aligned} \text{จะมีสมการคือ } \frac{x}{2} + \frac{y}{1} &= 1 \\ y &= -\frac{x}{2} + 1 \\ g(x) &= -\frac{x}{2} + 1 \end{aligned}$$

h เป็นเส้นตรงที่มีระยะตัดแกน X และ Y คือ 2 และ 4

$$\begin{aligned} \text{จะมีสมการคือ } \frac{x}{2} + \frac{y}{4} &= 1 \\ \frac{y}{4} &= -\frac{x}{2} + 1 \\ y &= -2x + 4 \\ h(x) &= -2x + 4 \end{aligned}$$

f เป็นพาราโบลาคว่ำที่มีจุดยอด $(h, k) = (2, 4)$ จะมีรูปสมการคือ $y = a(x - 2)^2 + 4$ เมื่อ $a < 0$

พาราโบลาผ่านจุด $(0, 0) \rightarrow$ แทนในสมการพาราโบลา จะได้

$$\begin{aligned} 0 &= a(0 - 2)^2 + 4 \\ -4 &= 4a \\ -1 &= a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้สมการพาราโบลา คือ } y &= -(x - 2)^2 + 4 \\ &= -(x^2 - 4x + 4) + 4 \\ &= -x^2 + 4x \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 + 4x \\ f'(x) &= -2x + 4 = h(x) \quad \dots(*) \end{aligned}$$

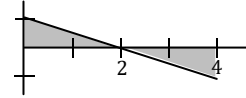
$\int_0^2 h(x) dx$ จะหาจากการอินทิเกรตปกติก็ได้ หรือจะหาจากพื้นที่ใต้โค้ง (ซึ่งบังเอิญเป็นรูปสามเหลี่ยม) ก็ได้

พื้นที่สามเหลี่ยม $= \frac{1}{2} \times \text{ฐาน} \times \text{สูง} = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4$ ดังนั้น $\int_0^2 h(x) dx = 4 \quad \dots(1)$

$\int_2^4 g(x) dx$ จะหาจากการอินทิเกรตปกติก็ได้ หรือจะหาได้จากพื้นที่ระหว่าง g กับแกน X ตรงช่วง $x = 2$ ถึง 4 ก็ได้

จากความสมมาตร พื้นที่ตรงช่วง $x = 2$ ถึง 4 จะเท่ากับพื้นที่ตรงช่วง $x = 0$ ถึง 2

ซึ่งหาได้จาก $\frac{1}{2} \times \text{ฐาน} \times \text{สูง} = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1$



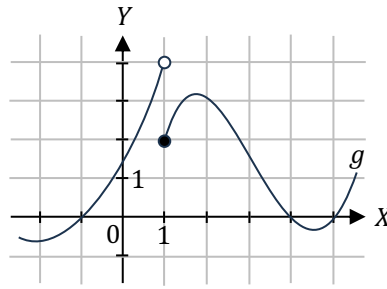
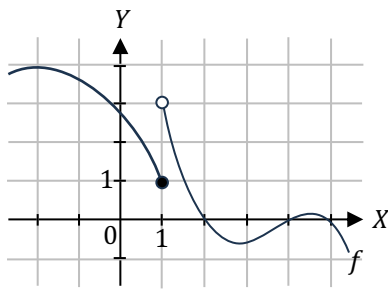
แต่พื้นที่ตรงช่วง $x = 2$ ถึง 4 อยู่ใต้แกน X จะมีค่าติดลบ ดังนั้น $\int_2^4 g(x) dx = -1 \quad \dots(2)$

จาก (1) และ (2) จะได้ $\int_0^2 h(x) dx = -4 \int_2^4 g(x) dx$ ซึ่งเมื่อรวมกับ (*) จะได้คำตอบคือ

$$f'(x) = h(x) \text{ และ } \int_0^2 h(x) dx = -4 \int_2^4 g(x) dx$$

จึงตอบตัวเลือกข้อ 1.

19. กำหนดกราฟของฟังก์ชัน f และ g ดังรูป



พิจารณาข้อความต่อไปนี้

- ก. $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) + g(x))$ หาค่าได้
- ข. ฟังก์ชัน $f + g$ มีความต่อเนื่องบนช่วง $[-2, 5]$
- ค. $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) g(x))$ หาค่าได้

จากข้อความ ก. ข. และ ค. ข้างต้น ข้อความใดต่อไปนี้กล่าวถูกต้อง

- 1. ข้อความ ก. ถูกต้องเพียงข้อเดียว
- 2. ข้อความ ค. ถูกต้องเพียงข้อเดียว
- 3. ข้อความ ก. และ ข. ถูกต้องเพียงสองข้อ
- 4. ข้อความ ก. และ ค. ถูกต้องเพียงสองข้อ
- 5. ข้อความ ข. และ ค. ถูกต้องเพียงสองข้อ

ตอบ ข้อ 1. ข้อความ ก. ถูกต้องเพียงข้อเดียว

ก. จากกราฟจะได้ $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$ และ $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = 4$ ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 1^-} (f(x) + g(x)) = 1 + 4 = 5$
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3$ และ $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = 2$ ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 1^+} (f(x) + g(x)) = 3 + 2 = 5$

ทางซ้าย 1 กับทางขวา 1 มีค่าเท่ากัน ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) + g(x))$ หาค่าได้ $\rightarrow$ ก. ถูก

ข. จากกราฟจะได้ $(f + g)(1) = f(1) + g(1) = 1 + 2 = 3$

แต่ $\lim_{x \rightarrow 1} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (f(x) + g(x)) = 5$ (จาก ก.)

เนื่องจาก $(f + g)(1) \neq \lim_{x \rightarrow 1} (f + g)(x)$ ดังนั้น $f + g$ ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 1 \rightarrow$ ข. ผิด

ค. จากกราฟจะได้ $\lim_{x \rightarrow 1^-} (f(x) g(x)) = (1)(4) = 4$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} (f(x) g(x)) = (3)(2) = 6$

ทางซ้าย 1 กับทางขวา 1 มีค่าไม่เท่ากัน ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) g(x))$ หาค่าไม่ได้ $\rightarrow$ ค. ผิด

จึงตอบตัวเลือกข้อ 1.

20. สลากกินแบ่งรัฐบาลประกอบด้วยเลขโดด 6 หลักเรียงกัน โดยมีจำนวนที่เป็นไปได้คือ 0, 1, 2, ..., 9
 รางวัลเลขท้าย 2 ตัวจะแจกให้สลากใบที่มี a เป็นจำนวนของหลักรองสุดท้าย และ b เป็นจำนวนของหลักสุดท้าย
 โดยทั้ง a และ b เป็นจำนวนที่ถูกสุ่มมาจาก 0, 1, 2, ..., 9 ในงวดนั้นๆ โอกาสที่จะถูกรางวัลเมื่อซื้อสลาก 1 ใบ
 เท่ากับข้อใด

1. $\frac{1}{2}$

2. $\frac{1}{10}$

3. $\frac{1}{100}$

4. $\frac{1}{1,000}$

5. $\frac{1}{100,000}$

ตอบ ข้อ 3. $\frac{1}{100}$

จำนวนแบบทั้งหมด: เลขโดด 6 ตัว แต่ละตัวเลือกเป็น 0 - 9 ได้ตัวละ 10 แบบ

จะได้จำนวนแบบทั้งหมด = 10^6 แบบ

จำนวนแบบที่ถูกรางวัล: เลขโดด 4 ตัวแรก แต่ละตัวเลือกเป็น 0 - 9 ได้ตัวละ 10 แบบ $\rightarrow$ เลือกได้ 10^4 แบบ

เลขโดด 2 ตัวหลัง ต้องเป็น a และ $b \rightarrow$ เลือกได้ 1 แบบ

จะได้จำนวนแบบที่ถูกรางวัล = $10^4 \cdot 1 = 10^4$ แบบ

จะได้ความน่าจะเป็น = $\frac{10^4}{10^6} = \frac{1}{100}$

จึงตอบตัวเลือกข้อ 3.

21. การแข่งขันฟุตบอลระหว่างทีม A ทีม B ทีม C และทีม D แบบพบกันหมดคู่ละหนึ่งครั้ง โดยแต่ละคู่มีผลคือแพ้หรือชนะเพียงอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น ข้อใดเป็นจำนวนผลการแข่งขัน ที่มีทีมใดทีมหนึ่งชนะทุกทีมที่เหลือ
1. 8 2. 12 3. 32 4. 40 5. 64

ตอบ ข้อ 3. 32

เลือก 1 ทีมที่ชนะทุกทีมที่เหลือ เลือกได้ 4 แบบ

3 ทีมที่เหลือ → แข่งกับทีมแรก (ที่ชนะทุกทีม) จะมีผลการแข่งคือแพ้ (เลือกไม่ได้)

→ แข่งกันเอง จะเลือกผลเป็น แพ้ หรือ ชนะ ได้นัดละ 2 แบบ

$$3 \text{ ทีม จับคู่แข่งกันเองได้ } \binom{3}{2} = \frac{3 \times 2}{2!} = 3 \text{ นัด คิดเป็นจำนวนแบบ } 2^3 \text{ แบบ}$$

$$\text{จะได้จำนวนแบบ} = 4 \times 2^3 = 32 \text{ แบบ}$$

จึงตอบตัวเลือกข้อ 3.

22. จากชุดข้อมูลประชากรใดๆ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก.) ควอร์ไทล์ที่ 3 ย่อมมีค่าเท่ากับเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 75

(ข.) ค่ามัธยฐานย่อมมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 60

(ค.) ค่ามัธยฐานย่อมมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับค่าเฉลี่ยเลขคณิต

ข้อสรุปใดถูกต้อง

1. มีเพียงข้อความ ก. และ ค. กล่าวถูกต้อง

2. มีเพียงข้อความ ก. และ ข. กล่าวถูกต้อง

3. มีเพียงข้อความ ก. กล่าวถูกต้อง

4. มีเพียงข้อความ ข. กล่าวถูกต้อง

5. มีเพียงข้อความ ค. กล่าวถูกต้อง

ตอบ ข้อ 2. มีเพียงข้อความ ก. และ ข. กล่าวถูกต้อง

ก) Q_3 คือข้อมูลในตำแหน่งที่ 3 เมื่อแบ่งข้อมูลทั้งหมดเป็น 4 ส่วน จากนั้นไปมาก

P_{75} คือข้อมูลในตำแหน่งที่ 75 เมื่อแบ่งข้อมูลทั้งหมดเป็น 100 ส่วน จากนั้นไปมาก

เนื่องจาก $\frac{3}{4} = \frac{75}{100}$ ดังนั้น สองค่านี้จึงอยู่ที่ตำแหน่งเดียวกัน จึงมีค่าเท่ากันเสมอ

ข) มัธยฐาน คือข้อมูลที่มีตำแหน่งตรงกลาง เมื่อเรียงข้อมูลจากน้อยไปมาก

P_{60} คือข้อมูลในตำแหน่งที่ 60 เมื่อแบ่งข้อมูลทั้งหมดเป็น 100 ส่วน จากนั้นไปมาก

จะเห็นว่ามัธยฐาน มีตำแหน่งน้อยกว่าหรือเท่ากับ P_{60} เสมอ (เท่ากันเมื่อมีข้อมูล 1 ตัว)

จึงมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ P_{60} เสมอ (เท่ากันได้เมื่อข้อมูลหลายตัวมีค่าซ้ำกัน)

ค) มัธยฐาน คำนวณจากตำแหน่งของข้อมูล แต่ค่าเฉลี่ยเลขคณิต คำนวณจากค่าของข้อมูล

นั่นคือ ถ้าข้อมูลบางตัวมีค่ามากผิดปกติ แล้วค่าเฉลี่ยเลขคณิตจะมีค่ามาก แต่ข้อมูลนั้นจะไม่มีผลกับมัธยฐาน

ถ้าข้อมูลบางตัวมีค่าน้อยผิดปกติ แล้วค่าเฉลี่ยเลขคณิตจะมีค่าน้อย แต่ข้อมูลนั้นจะไม่มีผลกับมัธยฐาน

ดังนั้น จึงสรุปไม่ได้ว่าค่าไหนมากกว่า

จึงตอบตัวเลือกข้อ 2.

23. ผลการสอบคัดเลือกนักเรียนเพื่อเข้าศึกษาต่อชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ของโรงเรียนแห่งหนึ่ง ซึ่งมีนักเรียนเข้าสอบทั้งหมด 200 คน แสดงด้วยตารางแจกแจงความถี่ของคะแนนของนักเรียนทั้งหมด ดังนี้

คะแนนสอบ (คะแนน)	จำนวนนักเรียน (คน)
50	2
55	10
60	48
65	40
70	24
75	20
80	20
85	16
90	10
95	6
100	4
รวม	200

จากข้อมูล พิจารณาข้อความต่อไปนี้

- ก) ฐานนิยมของข้อมูลชุดนี้ เท่ากับ 60 คะแนน
 ข) ควอไทล์ที่ 2 ของข้อมูลชุดนี้ เท่ากับ 75 คะแนน
 ค) เมื่อนำคะแนนสอบของนักเรียนทั้งหมดมาเขียนแผนภาพกล่อง พบว่า คะแนนต่ำสุดจากการสอบครั้งนี้ เป็นค่านอกเกณฑ์ของข้อมูลชุดนี้ (เมื่อค่านอกเกณฑ์ คือ ข้อมูลที่มีค่าน้อยกว่า $Q_1 - 1.5(Q_3 - Q_1)$ หรือข้อมูลที่มีค่ามากกว่า $Q_3 + 1.5(Q_3 - Q_1)$ โดยที่ Q_1 และ Q_3 แทนควอไทล์ที่ 1 และควอไทล์ที่ 3 ของข้อมูล ตามลำดับ)

จากข้อความ ก) ข) และ ค) ข้างต้น ข้อใดถูกต้อง

- ข้อความ ก) ถูกต้องเพียงข้อเดียวเท่านั้น
- ข้อความ ข) ถูกต้องเพียงข้อเดียวเท่านั้น
- ข้อความ ก) และ ค) ถูกต้องเท่านั้น
- ข้อความ ข) และ ค) ถูกต้องเท่านั้น
- ข้อความ ก) ข) และ ค) ถูกต้อง

ตอบ ข้อ 1. ข้อความ ก) ถูกต้องเพียงข้อเดียวเท่านั้น

ก) คะแนนสอบที่มีจำนวนนักเรียนมากที่สุด (48 คน) คือ 60 คะแนน = ฐานนิยม $\rightarrow$ ก) ถูก

ข) ควอไทล์ที่ 2 จะอยู่ตำแหน่งที่ $\frac{2}{4}(N + 1) = \frac{2}{4}(200 + 1) = 100.5 \rightarrow$ ต้องหาคะแนนคนที่ 100.5

หาข้อมูลในตำแหน่งต่างๆ จะต้องใช้ความถี่สะสม โดยสร้างช่องความถี่สะสมได้ดังตาราง

คะแนนสอบ (คะแนน)	จำนวนนักเรียน (คน)	จำนวนนักเรียนสะสม (คน)
50	2	2
55	10	12
60	48	60
65	40	100
70	24	124
75	20	144
80	20	164
85	16	180
90	10	190
95	6	196
100	4	200

จะเห็นว่าคนที่ 100 (ซึ่งเป็นคนสุดท้ายของชั้น) ได้ 65 คะแนน และคนที่ 101 (ซึ่งอยู่ในชั้นถัดไป) ได้ 70 คะแนน

ดังนั้น คนที่ 100.5 ได้คะแนน = คนที่ 100 + 0.5(คนที่ 101 - คนที่ 100)

$$= 65 + 0.5(70 - 65) = 67.5 \rightarrow \text{ข) ผิด}$$

ค) ควอไทล์ที่ 1 อยู่ตำแหน่งที่ $\frac{1}{4}(N + 1) = \frac{1}{4}(200 + 1) = 50.25$

จะเห็นว่าความถี่สะสมเพิ่มเป็น 60 ซึ่งเกิน 50.25 ในชั้นที่ 3 ซึ่งตรงกับชั้น 60 คะแนน $\rightarrow Q_1 = 60$

ควอไทล์ที่ 3 อยู่ตำแหน่งที่ $\frac{3}{4}(N + 1) = \frac{3}{4}(200 + 1) = 150.75$

จะเห็นว่าความถี่สะสมเพิ่มเป็น 164 ซึ่งเกิน 150.75 ในชั้น 80 คะแนน $\rightarrow Q_3 = 80$

จะได้ $Q_1 - 1.5(Q_3 - Q_1) = 60 - 1.5(80 - 60) = 30$

$$Q_3 + 1.5(Q_3 - Q_1) = 80 + 1.5(80 - 60) = 110$$

ดังนั้น ค่านอกเกณฑ์ คือข้อมูลที่น้อยกว่า 30 คะแนน หรือมากกว่า 110 คะแนน

ดังนั้น คะแนนต่ำสุด (= 50 คะแนน) จะไม่ใช่ค่านอกเกณฑ์ $\rightarrow$ ค) ผิด

จึงตอบตัวเลือกข้อ 1.

24. อายุการใช้งานของหลอดไฟชนิดหนึ่งมีการแจกแจงปกติ โดยมีค่าเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 2 และ 0.5 ปี ถ้าสุ่มหลอดไฟชนิดนี้มา 1 หลอด แล้วความน่าจะเป็นที่หลอดไฟจะมีอายุมากกว่า 2.5 ปี คือข้อใด เมื่อกำหนดให้ Z แทนตัวแปรสุ่มปกติมาตรฐาน และพื้นที่เส้นโค้งปกติมาตรฐานแสดงดังตาราง

z	$P(Z \leq z)$
-1	0.1587
-0.5	0.3085
0	0.5000
0.5	0.6915
1	0.8413
1.5	0.9332

1. -0.1587 2. 0.1587 3. 0.3085 4. 0.6915 5. 0.8413

ตอบ ข้อ 2. 0.1587

ปรับ $x = 2.5$ ปี เป็นค่า z ด้วยสูตร $\frac{x-\mu}{\sigma}$ จะได้ $z = \frac{2.5-2}{0.5} = 1$

ซึ่งจากตารางที่แถว $z = 1$ จะได้ $P(Z \leq 1) = 0.8413$ ดังนั้น $P(X \leq 2.5) = 0.8413$ ด้วย

แต่โจทย์ถาม $P(X > 2.5)$ ซึ่งจะตรงข้ามกับ $P(X \leq 2.5)$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } P(X > 2.5) &= 1 - P(X \leq 2.5) \\ &= 1 - 0.8413 = 0.1587 \end{aligned}$$

จึงตอบตัวเลือกข้อ 2.

25. ข้อมูลชุดหนึ่งประกอบด้วย 4, 8, 12, 16, 20 ให้ x เป็นค่าหนึ่งในข้อมูลชุดนี้ ถ้าตัด x ออกไป แล้ว จะทำให้ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลชุดใหม่มีค่าเท่ากับ 12 ข้อใดคือค่าของ x ดังกล่าว

1. 4 2. 8 3. 12 4. 16 5. 20

ตอบ ข้อ 3. 12

เดิมมีข้อมูล 5 จำนวน ถ้าตัด x ออก จะเหลือข้อมูล 4 จำนวน ซึ่งโจทย์ให้ค่าเฉลี่ยชุดใหม่ = 12

$$\text{จะได้ผลรวมข้อมูลชุดใหม่} = 4 \times 12 = 48$$

เนื่องจากข้อมูลชุดเก่า มีผลรวม = $4 + 8 + 12 + 16 + 20 = 60$

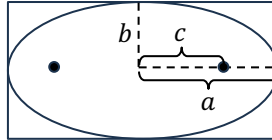
แสดงว่าตัด x ออกแล้ว ผลรวมข้อมูลน้อยลง $60 - 48 = 12$ ดังนั้น $x = 12$

จึงตอบตัวเลือกข้อ 3.

26. ช่างไม้คนหนึ่งมีแผ่นไม้เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ความกว้าง 24 เซนติเมตร และความยาว $20\sqrt{13}$ เซนติเมตร ถ้าต้องการตัดแผ่นไม้นี้เป็นรูปวงรีให้ใหญ่ที่สุดเท่าที่เป็นไปได้ (โดยมีแกนเอกและแกนโทขนานกับเส้นขอบของแผ่นกระดานไม้) โดยการปักหมุดที่จุดสองจุดบนแผ่นไม้ ผู้กลายเชือกทั้งสองข้างเข้ากับหมุด และใช้ปากกาแกะสลักปักดึงเชือกให้ตึงอยู่ตลอดเวลา แล้วค่อยๆ เคลื่อนที่ปากกาไปรอบๆ เพื่อให้เกิดรอยเป็นรูปวงรี จากเหตุการณ์ดังกล่าว ช่างไม้ควรปักหมุดทั้งสองจุดให้ห่างกันกี่เซนติเมตร

ตอบ 0068.00

พิจารณาส่วนประกอบรูปวงรี



จะได้แกนโท และแกนเอก ยาว 24 และ $20\sqrt{13}$ ซม. ดังนั้น $b = \frac{24}{2} = 12$ และ $a = \frac{20\sqrt{13}}{2} = 10\sqrt{13}$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ระยะโฟกัส } c &= \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(10\sqrt{13})^2 - 12^2} \\ &= \sqrt{1,300 - 144} \\ &= \sqrt{1,156} \\ &= 34 \end{aligned}$$

จะได้ระยะระหว่างหมุด $= 2c = 2(34) = 68$ เซนติเมตร

27. วงกลม $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$ มีเส้นสัมผัสที่ผ่านจุดกำเนิด 2 เส้น คือแกน Y และเส้นตรง L
ความชันของเส้นตรง L เท่ากับเท่าใด

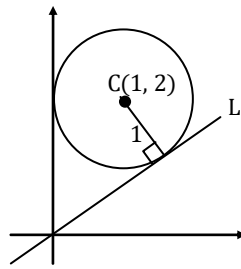
ตอบ 0000.75

เมื่อเทียบกับรูปสมการวงกลม $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

จะได้จุดศูนย์กลาง $(h, k) = (1, 2)$ และรัศมี $r = 1$ ดังรูป

เส้นตรง L มีระยะตัดแกน Y ที่ $c = 0$ และสมมติให้เส้นตรง L มีความชัน $= m$

แทนในรูปสมการ $y = mx + c$ จะได้สมการเส้นตรง L คือ $y = mx$
 $0 = mx - y$



ระยะจาก $C(1, 2)$ ไปยังเส้นตรง $L : mx - y = 0$ จะต้องเท่ากับรัศมีวงกลมมีค่าเท่ากับ 1

ระยะจากจุด (a, b) ไปยังเส้นตรง $Ax + By + C = 0$ จะเท่ากับ $\frac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น} \quad \frac{|m(1)+(-1)(2)+0|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} &= 1 \\ |m - 2| &= \sqrt{m^2 + 1} \\ (m - 2)^2 &= m^2 + 1 \\ m^2 - 4m + 4 &= m^2 + 1 \\ 3 &= 4m \\ 0.75 &= \frac{3}{4} = m \end{aligned}$$

ความชันของเส้นตรง L จึงเท่ากับ 0.75

28. ให้ $\vec{u}$, $\vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ ที่ $|\vec{u}| = |\vec{v}| = |\vec{w}| = 2$ และสอดคล้องกับสมบัติทั้งสี่ข้อต่อไปนี้

(ก) $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ทำมุมกัน 135°

(ข) เวกเตอร์ $\vec{v} - \vec{w}$ ยาว 2 หน่วย

(ค) พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีด้านประกอบมุมเป็น $\vec{u}$ และ $\vec{w}$ มีค่าเท่ากับ $2\sqrt{2}$ ตารางหน่วย และ

(ง) มุมระหว่าง $\vec{u}$ และ $\vec{w}$ เป็นมุมป้าน

แล้ว $(\vec{v} - \vec{u}) \cdot (\vec{v} - \vec{w})$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

ตอบ 0002.00

กระจายดอทในการบวกลบเวกเตอร์ จะได้ $(\vec{v} - \vec{u}) \cdot (\vec{v} - \vec{w}) = \vec{v} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{w} - \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \dots (*)$

จากสมบัติการดอท จะได้ $\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|^2 = 2^2 = 4 \dots (1)$

จากข้อ (ก) จะได้ $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos 135^\circ = (2)(2)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2\sqrt{2} \dots (2)$

และจาก $|\vec{v} - \vec{w}|^2 = |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 - 2\vec{v} \cdot \vec{w}$

$$2^2 = 2^2 + 2^2 - 2\vec{v} \cdot \vec{w} \quad (\text{จาก ข้อ (ข)})$$

$$2\vec{v} \cdot \vec{w} = 2^2$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 2 \dots (3)$$

และจาก พื้นที่สี่เหลี่ยมด้านขนานที่เกิดจาก $\vec{u}$ และ $\vec{w} = |\vec{u} \times \vec{w}| = |\vec{u}||\vec{w}| \sin \theta$

$$(\text{จาก ข้อ (ค)}) \quad 2\sqrt{2} = (2)(2) \sin \theta$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \theta$$

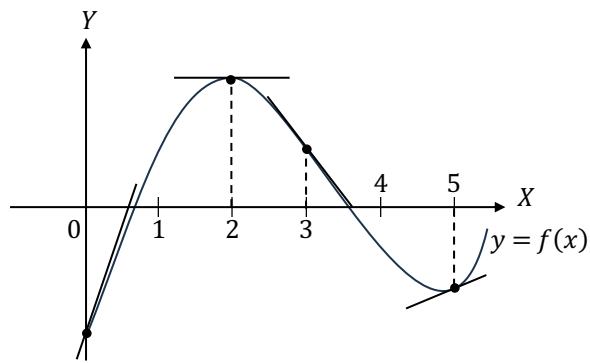
$$(\text{จาก ข้อ (ง)}) \quad \cancel{45^\circ}, 135^\circ = \theta$$

$$\text{จะได้ } \vec{u} \cdot \vec{w} = |\vec{u}||\vec{w}| \cos 135^\circ = (2)(2)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2\sqrt{2} \dots (4)$$

แทน (1), (2), (3) และ (4) ใน (*) จะได้ $4 - 2 - (-2\sqrt{2}) + (-2\sqrt{2}) = 2$

ดังนั้น $(\vec{v} - \vec{u}) \cdot (\vec{v} - \vec{w}) = 2$

29. ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่ $x = 0$, $x = 2$, $x = 3$ และ $x = 5$ แสดงได้ดังภาพ



ถ้า a, b, c, d เป็นสมาชิกของเซต $\{0, 2, 3, 5\}$ ที่ทำให้ $f'(a) < f'(b) < f'(c) < f'(d)$

จงหาค่าของ $1,000a + 100b + 10c + d$

ตอบ **3250.00**

$f'(x)$ คือความชันเส้นสัมผัส ดังนั้น เราต้องเรียงความชันทั้ง 4 จุดในรูป จากน้อยไปมาก

จากรูปกราฟ จะเห็นว่า $f'(0) = +$ มากๆ $f'(2) = 0$ $f'(3) = -$ มากๆ $f'(5) = +$ น้อยๆ

เรียงลำดับ จะได้ $f'(3) < f'(2) < f'(5) < f'(0)$

จะได้ค่าที่โจทย์ถามคือ $1,000(3) + 100(2) + 10(5) + 1(0) = 3,250$

30. นิกกี้แบ่งเวลาอ่านหนังสือเตรียมสอบ 4 วิชา (คณิตศาสตร์ เคมี ฟิสิกส์ ชีววิทยา) ใน 3 วัน (จันทร์ อังคาร พุธ) โดยแต่ละวิชาจะอ่านเป็นเวลาเพียงครึ่งวันในช่วงเช้าหรือช่วงบ่ายของวันใดวันหนึ่งเพียงวันเดียว โดยมีเงื่อนไขดังนี้
- ทุกวันอ่านหนังสืออย่างน้อยหนึ่งวิชา
 - วิชาเคมีอ่านก่อนวันพุธ

จงหาจำนวนวิธีการจัดตารางการอ่านหนังสือของนิกกี้

ตอบ **0192.00**

จะนับจำนวนแบบที่ “อ่านเคมีวันไหนก็ได้” ก่อน

อ่าน 4 วิชา ใน 3 วัน อย่างน้อยวันละ 1 วิชา → จะมี 1 วันที่อ่าน 2 วิชา และอีก 2 วันอ่านวันละ 1 วิชา

เลือกวันที่อ่าน 2 วิชา มีวันให้เลือกได้ 3 แบบ

เลือกจาก 4 วิชา สำหรับอ่านช่วงเช้าของวันนั้น ได้ 4 แบบ

เลือกจาก 3 วิชาที่เหลือ สำหรับอ่านช่วงบ่ายของวันนั้น ได้ 3 แบบ

วันที่เหลือ (อ่าน 1 วิชา) วันแรก เลือกจาก 2 วิชาที่เหลือ ได้ 2 แบบ

เลือกที่จะอ่านวิชานั้นในช่วงเช้า หรือช่วงบ่าย ได้ 2 แบบ

วันที่เหลือ (อ่าน 1 วิชา) อีกวัน เลือกอ่าน 1 วิชาที่เหลือในช่วงเช้า หรือช่วงบ่าย ได้ 2 แบบ

จะได้จำนวนแบบที่ “อ่านเคมีวันไหนก็ได้” $= 3 \times 4 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 = 288$ แบบ

ใน 288 แบบนี้ จะมีทั้งกลุ่มที่อ่านเคมีวันจันทร์ กลุ่มที่อ่านเคมีวันอังคาร และกลุ่มที่อ่านเคมีวันพุธ

เนื่องจากแต่ละวัน ไม่มีเงื่อนไขอะไรที่แตกต่างกัน ดังนั้น ทั้งสามกลุ่มนี้จะมีจำนวนแบบเท่ากัน $= \frac{288}{3} = 96$ แบบ

ดังนั้น จำนวนแบบที่อ่านเคมีก่อนวันพุธ = จำนวนแบบที่อ่านเคมีวันจันทร์ + จำนวนแบบที่อ่านเคมีวันอังคาร

$$= 96 + 96$$

$$= 192 \text{ แบบ}$$